შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

~~ჯერ ვაჩვენოთ რომ შეუძლებელია რომ ან $f(x)<f(x+y+z)$ ან $f(y)<f(x+y+z)$ ან $f(z)<f(x+y+z)$~~

განვიხილოთ ორი შემთხვევა ნებისმიერი $x,y,z \in R$ რიცხვებისათვის.

1) თუ სამივე $f(x)$, $f(y)$-ც და $f(z)$-ც მეტია (ან ტოლი) $f(x+y+z)$ ანუ თუ $f(x)\geq f(x+y+z)$, $f(y)\geq f(x+y+z)$ და $f(z)\geq f(x+y+z)$

ცხადია ამ შემთხვევაში მოცემული უტოლობა $f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f(x+y+z)$ სამართლიანია რადგან სამივე $f(x)$-ც $f(y)$-ც და $f(z)$-ც მეტია (ან ტოლი) $f(x+y+z)$ და სამივეს ჯამიც იქნება მეტი (ან ტოლი) ვიდრე $f(x+y+z)+f(x+y+z)+f(x+y+z)=3f(x+y+z)$

ანუ თუ სამივე $x,y,z \in R$ რიცხვისთვის სრულდება: $f(x)\geq f(x+y+z)$, $f(y)\geq f(x+y+z)$ და $f(z)\geq f(x+y+z)$ დასამტკიცებელი უტოლობა სრულდება. ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა.

2). დავუშვათ, რომ $f(x)$, ან $f(y)$ ან $f(z)$ ნაკლებია $f(x+y+z)$. მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ რომ $f(x)<f(x+y+z)$ მაშინ ვაჩვენოთ და უტოლობის ~~[illegible]~~ დავუშვათ $f(x)$ ნაკლებია ვიდრე $f(x+y+z)$ თუ ამ შემთხვევაში უტოლობა სამართლიანი იქნება მაშინ ის სამართლიანი იქნება ყოველთვის. ანუ თუ დავამტკიცებთ რომ $2f(x)+f(y)+f(z)\geq 4f(x+y+z)$ ხოლო $f(x)<f(x+y+z)$ მაშინ ცხადია უტოლობა $f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f(x+y+z)$-ც სამართლიანი იქნება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

თუ ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ რომ $2f(x)+f(y)+f(z)\ge 4f(x+y+z)$ გვაქვს ჩვენ ვიცით რომ $f(x)+f(y)\ge 2f(x+y)$ თუ ამ ჩვენ უტოლობაში $f(y)+f(z)$-ს შევცვლით ნაკლებით $2f(y+z)$-ით და დავამტკიცებთ მიღებულ უტოლობას მაშინ ავტომატურად უტოლობა სამართლიანი იქნება თუ ამ ჩვენ ვაჩვენებთ რომ:

$2f(x)+2f(y+z)\ge 4f(x+y+z)$ მაშინ უტოლობა $2f(x)+f(y)+f(z)\ge 4f(x+y+z)$-ც სამართლიანი იქნება. ახლა დავამტკიცოთ [illegible] რომ:

$2f(x)+2f(y+z)\ge 4f(x+y+z) \Leftrightarrow 2(f(x)+f(y+z))\ge 4f(x+y+z)$ ახლა იგივე თუ ჩვენ შევცვლით მარცხენა $f(x)+f(y+z)$-ს ნაკლებით $2f(x+y+z)$ და დავამტკიცებთ მიღებულ უტოლობას მაშინ ეს უტოლობაც სამართლიანი იქნება თუ უნდა დავამტკიცოთ რომ:

$2(2f(x+y+z))\ge 4f(x+y+z) \Leftrightarrow 4f(x+y+z)\ge 4f(x+y+z) \Leftrightarrow 0\ge 0$ ეს მართლაც სამართლიანი უტოლობაა მაშასადამე ჩვენ მივიღეთ რომ:

$2(2f(x+y+z))\ge 4f(x+y+z) \Rightarrow 2(f(x)+f(y+z))\ge 4f(x+y+z) \Rightarrow 2f(x)+2f(y+z)\ge$
$\ge 4f(x+y+z) \Rightarrow 2f(x)+f(y)+f(z)\ge 4f(x+y+z)$ [illegible] $f(x)<f(x+y+z)$ [illegible] $f(x)+f(y)+f(z)\ge 3f(x+y+z)$ თუ ჩვენ დავამტკიცებთ [illegible] უტოლობა [illegible] $f(x)$ [illegible] $f(y)$ და [illegible] $f(z)$ [illegible] ნაკლები $f(x+y+z)$-ზე, და [illegible] $f(x+y+z)$ [illegible] უტოლობა სამართლიანი [illegible] $x,y,z\in R$ [illegible]

რ. დ. გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

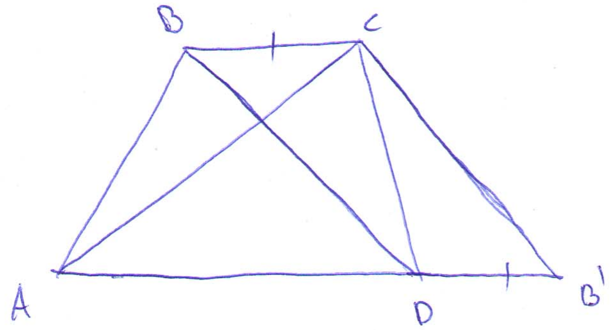
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



ავიღოთ D წერტილიდან ფუძეზე (ამ შემთხვევაში AD-ზე) ტოლფერდა BC-ს ტოლი მონაკვეთი. მივიღებთ მონაკვეთის ბოლოს (იყოს B') შევაერთოთ C-სთან მივიღებთ რომ $BC \parallel DB'$ და $BC = DB'$ ანუ $BDB'C$ პარალელოგრამია, ანუ $CB' \parallel BD$ და $CB' = BD$. ახლა ვაჩვენოთ რომ $S_{ABCD} = S_{ACB'}$. ამ ორ ფიგურას ACD ნაწილი აქვთ საერთო ამიტომ თუ ვაჩვენებთ რომ $S_{DCB'} = S_{ABC}$ მაშინ $S_{ABCD} = S_{ACB'}$. მართლაც ამ ორ სამკუთხედს (DCB'-ს და ABC-ს აქვთ ტოლი ფუძეები ($BC = DB'$) და ამ ფუძეებზე დაშვებული სიმაღლე (ორივე შემთხვევაში h_{ABC} და $h_{DCB'}$ არის ტრაპეციის სიმაღლე) ანუ $S_{ABC} = S_{DCB'} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ACB'}$ ანუ მივიღეთ რომ ACB' სამკუთხედი ტოლდიდია $ABCD$ ტრაპეციის, მაგრამ ამ სამკუთხედის ორი გვერდი ტრაპეციის დიაგონალის ტოლია შესაბამისად ნახ. ~~~~ ახლა ავაგოთ ACB' სამკუთხედი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

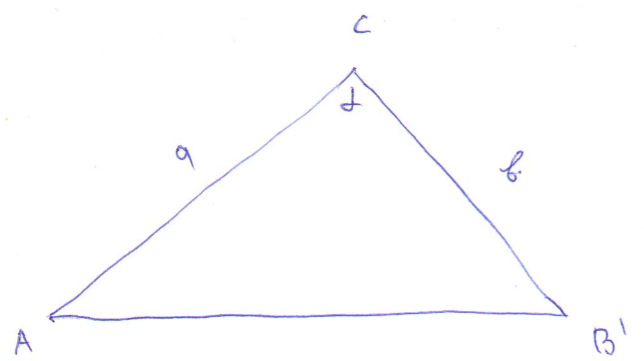
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 2

გვერდი № 2



ამ სავარაუდო სამკუთხედში ჩვენ (ABCD) ოთხკუთხედის სამკუთხედის ფართი, ჩვენ და ხელი ტოლობაზე ფართი აქვს ანუ $S_{ACB'}=50$ რადგან AC დიაგონალი ოთხკუთხედის. ... რადგან $B'C=BD$. ანუ თუ $AC=a$ და $CB'=b$ მაშინ $a+b=AC+CB'=20$. ასევე ~~...~~ თუ $\angle ACB'=\alpha$ მაშინ $S_{ACB'}=\frac{ab\sin\alpha}{2}=50$.

ანუ ჩვენ ვიღებთ რომ $ab=\frac{100}{\sin\alpha} \Rightarrow a=\frac{100}{b\sin\alpha}$ რადგან $a+b=20$ ხოლო ვიცით $a=\frac{100}{b\sin\alpha}$ მივიღებთ $a+b=20=b+\frac{100}{b\sin\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow 20b\sin\alpha=100+b^2\sin\alpha$ ანუ $b^2\sin\alpha-20\sin\alpha\, b+100=0$. ეს კვადრატული განტოლებაა! ..., b ... ... (... ... b ... ...) მაშინ

$$D=\frac{20\pm\sqrt{400\sin^2\alpha-400\sin\alpha}}{2\sin\alpha}=\frac{20\pm20\sqrt{\sin^2\alpha-\sin\alpha}}{2\sin\alpha}$$

ანუ ... ...

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 2

გვერდი № 3.

ტოლობიდან b სინუსიდან ჩანს რომ $\sin^2\alpha - \sin\alpha$ უნდა იყოს არაუარყოფითი

მაგრამ $\sin\alpha \le 1$ ამიტომ $\sin^2\alpha \le \sin\alpha$ (რადგან $\alpha \in (0;180)$)

ანუ $\sin^2\alpha - \sin\alpha \le 0$ ხოლო რადგან ამავდროულად $\sin^2\alpha - \sin\alpha \ge 0$

გამოდის რომ $\sin\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = 1$ ხოლო რადგან

$\alpha \in (0,180)$ (რადგან ეს სამკუთხედის კუთხეა) გამოდის რომ

$\alpha = 90$. ხოლო თუ $\alpha = 90$ მაშინ.

$ab = \frac{100}{\sin\alpha} = 100$ ხოლო $a+b=20$. ანუ მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases} ab=100 \\ a+b=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{100}{b} \\ a+b=20 \end{cases} \Rightarrow b+\frac{100}{b}=20 \Rightarrow b^2-20b+100=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{20\pm\sqrt{400-400}}{2}=\frac{20\pm 0}{2}=10.$$ ანუ $b=10$ ხოლო რადგან $a+b=20$

მაშინ $a=10=b$. ანუ $\Delta ACB' \Rightarrow AB'=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{200}=$

$=10\sqrt{2}$ (რადგან $\angle ACB'=90^\circ$ და $AC=CB'=10$)

ხოლო რადგან AB' არის ტრაპეციის ფუძეების ჯამი

მაშინ ჩვენ ტრაპეციაში $BC+AD=10\sqrt{2}$ მაშინ $S_{ABCD}=50=\frac{BC+AD}{2}\cdot h=$

$=\frac{\sqrt{2}\cdot 10}{2}h=5\sqrt{2}h$ ანუ $5\sqrt{2}h=50 \Rightarrow \sqrt{2}h=10 \Rightarrow h=\frac{10}{\sqrt{2}}$

პასუხი $h=\frac{10}{\sqrt{2}}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ სამეული [illegible]!

თუ $a+b+c \vdots a$, $a+b+c \vdots b$ და $a+b+c \vdots c$ მაშინ [illegible] [illegible] [illegible].

$a+b \vdots c$, $b+c \vdots a$ და $a+c \vdots b$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ ვარიანტები მაშინ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]!

$a \geq b \geq c$ მაშინ თუ $b+c \vdots a$ და [illegible] $b \leq a$ და $c \leq a$ [illegible] [illegible] $b+c \leq 2a$. და [illegible] $b+c \vdots a$ [illegible] $2a-b$, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $a-b$, [illegible] $2a$ და a (0 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $b=c=0$ [illegible] $a+c \vdots b$ [illegible] $a \vdots 0$ [illegible] [illegible] [illegible]) [illegible] [illegible] $b+c=2a$ [illegible] $b+c=a$. [illegible] თუ $b+c=2a$ და $b \leq a$ და $c \leq a$ ([illegible] [illegible] [illegible]) მაშინ [illegible] [illegible] $a-b$, $a-b$, [illegible] [illegible] $2a$ [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $b \leq a$ და $c \leq a$ [illegible] თუ $b+c=2a$ მაშინ $b \geq a$ და $c \geq a$ [illegible] [illegible] [illegible] $c \leq a$ და $b \leq a$ [illegible] [illegible] [illegible] $b=c=a$

[illegible] თუ $b+c=a$ [illegible] $a \geq b \geq c$ ([illegible] [illegible] [illegible]) მაშინ [illegible] [illegible] $a+c+b \vdots b$ [illegible] $a+c \vdots b$ [illegible] [illegible] $a=b+c$ [illegible] $a+c \vdots b \Leftrightarrow b+c+c \vdots b \Leftrightarrow 2c \vdots b$ [illegible] $c \leq b$ [illegible] $2c \leq 2b$ და [illegible] $2c \vdots b$ [illegible] [illegible] $2c=2b$, [illegible] $c=b$, [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 166

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$2c=b \Rightarrow c=\frac{b}{2}$ ~~ეს მივიღე~~

თუ მივიღე $b+c=2a$ მაშინ $b=c=a$

და თუ $b+c=a$ მაშინ ან $b=c$ (სიმეტრიულ ვიღებ) მაშინ $2b=a \Rightarrow b=\frac{a}{2}$ ეს $b=c=\frac{a}{2}$), ან $b=2c$ (სიმეტრიულ ვიღებ) მაშინ $\begin{cases} b+c=a \\ b=2c \end{cases} \Rightarrow 3c=a$ ეს $b=2c$ და $a=3c$

ეს საბოლოოდ მივიღე მაშინ ჩვენთვის სამი სამეულია: $(a,a,2a)$, (b,b,b) და $(x,2x,3x)$ მაგრამ თუ შევამოწმებთ ამ სამეულებს [illegible] სამეულებს.

[illegible] [illegible] [illegible] სამეულები [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (სადაც [illegible] [illegible] სამეული [illegible] [illegible]) ეს [illegible] [illegible] $(a,a,2a)$ სამეულები [illegible], [illegible] (b,b,b) სამეულები და [illegible] $(x,2x,3x)$ სამეულები [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 4	17.04.2011/ მათ/ II/ 16 B

ამოცანა № 3 — გვერდი № 3.

1) $(a,a,2a)$ სახის სამეულების რიცხვი ტოლია 2011-მდე ლუწი ნატურალური რიცხვების (რადგანაც ყოველი y-სთვის ჩვენ ვღებულობთ $(\frac{y}{2}, \frac{y}{2}, y)$ სამეულს) ხოლო ეს რიცხვი იქნება $\frac{2010}{2} = 1005$. ხოლო რადგანაც ყველა სამეულისთვის შეიძლება ჩავწეროთ 3 ვარიანტი: $(a,a,2a)$, $(a,2a,a)$ და $(2a,a,a)$. ამიტომ ყველა დალაგებული სამეულის რაოდენობა $3 \cdot 1005 = 3015$.

2) (b,b,b) სახის სამეულების რიცხვი იქნება 2011 რადგან ნებისმიერი $y \in N$ და $y \leq 2011$ რიცხვისთვის (y,y,y) სამეული გვაქვს. ასევე ყველა სამეულის დალაგება შეიძლება მხოლოდ ერთი გზით (y,y,y) ამიტომ ყველა დალაგებული სამეულის რაოდენობა 2011.

3) $(x,2x,3x)$ სახის სამეულების რიცხვი იქნება $\frac{2010}{3}$ ხოლო ეს სამეულები დალაგდება შეიძლება ექვსი სხვადასხვა გზით: $(x,2x,3x)$; $(x,3x,2x)$, $(2x,x,3x)$, $(2x,3x,x)$, $(3x,x,2x)$ და $(3x,2x,x)$ ამიტომ სულ ყველა დალაგებული სამეულის რაოდენობა $\frac{6 \cdot 2010}{3} = 2010 \cdot 2 = 4020$. სხვა შემთხვევა:

ამიტომ სულ ყველა დალაგებული სამეულის რიცხვი რომელიც აკმაყოფილებს
$a+b+c \,\vdots\, a$
$a+b+c \,\vdots\, b$
$b+c+a \,\vdots\, c$
ეს სამი პირობა სრულდება ტოლია $4020+1005+2011 = 5025+2011 = 7036$.

პასუხი: 7036.